Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 27. April 2022

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

1. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2022)

Aufgabe 1 – Spannbäume & Breitensuche

Begründen Sie jeweils, warum die Behauptung korrekt ist, oder widerlegen Sie die Behauptung anhand eines Gegenbeispiels.

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit Kantengewichten $w \colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$ ein ausgezeichneter Knoten.

a) Wenn $w(e) = 1$ für alle $e \in E$, dann ist jeder Breitensuchbaum mit Quelle s ein minimaler Spannbaum von G. **2 Punkte**

b) Wenn $w(e) = 1$ für alle $e \in E$, dann ist jeder minimale Spannbaum von G ein Breitensuchbaum mit Quelle s. **2 Punkte**

c) Wenn $w(e) \in \{1, 2, 3\}$ für alle $e \in E$, dann ist jeder minimale Spannbaum von G ein Tiefensuchbaum mit Quelle s. **2 Punkte**

Aufgabe 2 – Zweifärbbarkeit

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zweifärbbar, wenn eine Abbildung $c \colon V \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ existiert, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt, dass $c(u) \neq c(v)$. In anderen Worten, die Knoten eines zweifärbbaren Graphen können wir so färben, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe bekommen.

a) Welches ist der kleinste Graph (gemessen an der Anzahl der Knoten), der nicht zweifärbbar ist? **1 Punkt**

b) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und eine gegebene Färbung c testet, ob es zwei benachbarte Knoten mit derselben Farbe gibt. In diesem Fall soll der Algorithmus *false* ausgeben. Sind alle benachbarten Knoten verschiedenfarbig, soll *true* ausgegeben werden. Geben Sie für die Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus eine asymptotisch scharfe obere Schranke an. **2 Punkte**

c) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ermittelt, ob er zweifärbbar ist. Die Laufzeit des Algorithmus soll $O(|V| + |E|)$ sein. Beachten Sie, dass der Graph G nicht notwendigerweise zusammenhängend ist. **4 Punkte**

Aufgabe 3 – Eulerpfade

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die zusammenhängenden, ungerichteten Graphen, die einen Eulerkreis besitzen, genau diejenigen sind, in denen alle Knoten geraden Grad haben. Sie sollen nun eine ähnliche Aussage für Euler-Pfade zeigen. Beweisen Sie dazu die folgende Aussage:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Dann gilt: G hat genau dann einen Eulerpfad, wenn die Anzahl an Knoten $v \in V$, für die gilt, dass $deg(v)$ ungerade ist, genau 0 oder 2 ist.

Denken Sie daran, dass Sie eine Äquivalenz beweisen können, indem sie Implikationen in beide Richtungen zeigen. **4 Punkte**

Aufgabe 4 – Graphmodellierung

Modellieren Sie die folgende Fragestellung als Graphenproblem. Geben Sie dabei genau an, welche Objekte was in Ihrem Graphen darstellen.

Sie betreuen ein Projekt, das sich aus vielen vordefinierten Aufgaben zusammensetzt. Manche Aufgaben können erst erledigt werden, wenn bestimmte andere Aufgaben abgeschlossen sind. Für jede Aufgabe ist vorher genau bekannt, von welchen Aufgaben sie abhängt. Ihr Projektteam kann immer nur eine Aufgabe gleichzeitig bearbeiten und eine angefangene Aufgabe wird immer abgeschlossen bevor eine neue Aufgabe begonnen werden kann.

Wie können Sie alle Aufgaben des Projekts in eine geeignete Reihenfolge bringen?
3 Punkte

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 3. Mai 2022, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 1. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!